Утверждено приказом
№ 30-08-1-0 от 30.08.2023 года

Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №23»

ПРИНЯТА
На заседании педагогического совета
Протокол № 1
от « 30 » августа 2023 г.

УТВЕРЖДЕНА
приказом от 30.08.2023 № 30-08-4-О

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА -
ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА

ЕСТЕСТВЕННО - НАУЧНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ

СЧИТАЙ. ДУМАЙ. РАССУЖДАЙ.

Возраст обучающихся: 13 - 14 лет (8 класс)
Срок реализации: 1 год

Авторы-составители:
Уткина Л.Л., Мартьянова А.И.
учителя математики

Великий Новгород

Утверждено приказом
№ 30-08-1-0 от 30.08.2023 года

2023 год

Пояснительная записка.

Направленность программы: естественно - научная

Дополнительная общеобразовательная (общеразвивающая) программа естественно-научной направленности «Считай. Думай. Рассуждай.» разработана на основе:
- Федерального закона от 29 декабря 2012 года № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Приказа Министерства просвещения РФ «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам от 9 ноября 2018 г. N196;
- Постановления Главного государственного санитарного врача РФ от 28 сентября 2020 г. N 28 «Об утверждении санитарных правил СП 2.4.4.3648-20 "Санитарно-эпидемиологические требования к организациям воспитания и обучения, отдыха и оздоровления детей и молодёжи»;
- Письма Минобрнауки России от 18.11.2015 N 09-3242 "О направлении информации" (вместе с "Методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (включая разноуровневые программы)".

Педагогическая целесообразность:

Предлагаемый курс «Считай. Думай. Рассуждай.» призван заинтересовать учеников сведениями о математике и математиках, выработать у них навыки рациональных вычислений, формировать математическое и логическое мышление, расширить кругозор и, главное, пробудить желание заниматься изучением одной из основных наук.

Содержание данного курса и формы организации проведения занятий помогут учащимся через практические занятия оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы и предоставят им возможность работать на уровне повышенных возможностей.

Обучение основывается **на педагогических принципах:**
- личностно-ориентированного подхода;
- систематичности, наглядности и последовательности обучения;
-сотрудничества и ответственности.

Отличительные особенности:

Программа состоит из ряда независимых разделов и включает вопросы, углубляющие знания учащихся и расширяющие их математический кругозор.

Утверждено приказом
№ 30-08-1-0 от 30.08.2023 года

Рассматриваются различные способы решения уравнений и неравенств, решение комбинированных уравнений, что способствует активизации мыслительной деятельности учащихся.

Новизна:

На занятиях происходит знакомство учащихся с категориями математических задач, с новыми методами рассуждений, так необходимыми для успешного решения учебных и жизненных проблем, а так же включено решение задач повышенной трудности.

Актуальность:

Актуальность курса «Решай. Думай. Рассуждай.» заключается в необходимости реализации индивидуальных образовательных запросов, удовлетворения познавательных потребностей.

Цель:

Формирование предметных компетенций в области математики и повышение общего уровня математической культуры.

Задачи:

- обеспечение индивидуальных запросов учащихся и их родителей;
- формирование математического мышления обучающихся, выражающегося в изобретательности, логичности, доказательности, нестандартности мышления;
- формирование умений отстаивать собственные взгляды, активно включаться в поиск интересующей информации;
- формирование способности анализировать информацию;
- углубление знаний учащихся о различных методах решения и базовых математических понятий, формирование у школьников компетенций,
- развитие интереса собственно к математике;
- развитие самостоятельности учащихся и способности к самоорганизации; оказание помощи ученику в оценивании своего потенциала с точки зрения образовательной перспективы.

Возраст: 13-14 лет (8 класс)

Сроки реализации: 1 год

Формы занятий: индивидуальная и групповая

Режим занятий:

Программа рассчитана на 34 учебные недели в течение учебного года. Режим занятий 1 раз в неделю по 40 минут. Во время занятий предусмотрены 10-минутные перерывы для снятия напряжения и отдыха.

Утверждено приказом
№ 30-08-1-0 от 30.08.2023 года

Планируемые результаты:
Учащиеся должны овладеть системой функциональных понятий, функциональным языком и символикой; применять полученные знания.
Учащиеся должны уметь:
организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками: определять цели, распределение функций и ролей участников, взаимодействие и общие способы работы; умение работать в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учета интересов; слушать партнера; формулировать, аргументировать и отстаивать свое мнение.
У учащихся сформированы компетентности:
- готовность к самообразованию;
- готовность к использованию информационных ресурсов;
- готовность к социальному взаимодействию;
- коммуникативная компетентность;
- исследовательская компетентность;
- технологическая компетентность.

Формы аттестации:
- результаты олимпиад различного уровня;
- наблюдения;
- подготовка учебных проектов.

Тематическое планирование.

№	Тема	Количество часов			Форма аттестации
		всего	теория	практика	
Преобразование дробно рациональных выражений. 6часов.					
1-2	Раскрытие скобок.	2	1	1	наблюдение за работой в группе
3-4	Разложение на множители.	2	1	1	
5-6	Сокращение дробей.	2	1	1	
Квадратный корень. 6 часов.					
7-8	Преобразование выражений с корнем.	2	1	1	работа над учебными проектами и их
9-10	Решение простейших иррациональных уравнений.	2	1	1	
11-12	Построение графика функции y	2	1	1	

	= a√x, исследование положения графика в системе координат в зависимости от параметра.				защита
Квадратные уравнения. 5 часов.					
13-15	Способы решения квадратных уравнений.	3	1	2	наблюдение
16	Решение комбинированных уравнений.	1	0,5	0,5	наблюдение за работой в группе
17	Решение задач составлением квадратного уравнения.	1	0,5	0,5	
Степень. 4 часа.					
18-19	Преобразование степенных выражений.	2	1	1	наблюдение
20-21	Сокращение дробей.	2	1	1	наблюдение
Неравенства. 9 часов.					
22-23	Методы решения неравенств.	2	1	1	работа над учебными проектами и их защита
24-25	Методы доказательства неравенств.	2	1	1	
26-27	Решение задач составлением неравенства.	2	1	1	
28-29	Сложение, вычитание, умножение и деление неравенств.	2	1	1	
30	Некоторые замечательные неравенства.	1	0,5	0,5	
31-32	**Текстовые задачи на движение 2 часа.**	**2**	1	1	наблюдение
33-34	**Занимательные логические задачи 2 часа.**	**2**	1	1	наблюдение
	Итого:	34	16,5	17,5	

Содержание программы.

Преобразование дробно рациональных выражений 6часов.
Раскрытие скобок. Разложение на множители. Сокращение дробей.
Квадратный корень 6 часов.
Преобразование выражений с корнем. Решение простейших иррациональных уравнений. Построение графика функции y = a√x, исследование положения графика в системе координат в зависимости от параметра a.
Квадратные уравнения 5 часов.

Способы решения квадратных уравнений. Решение комбинированных уравнений. Решение задач составлением квадратного уравнения.
Степень 4 часа.
Преобразование степенных выражений. Сокращение дробей.
Неравенства 9 часов.
Методы решения неравенств. Методы доказательства неравенств. Решение задач составлением неравенства. Сложение, вычитание, умножение и деление неравенств. Некоторые замечательные неравенства.
Текстовые задачи на движение 2 часа.
Занимательные логические задачи 2 часа.

Календарный учебный график.

Учебные четверти и каникулы:

1 четверть: (8 недель+1 день)	01.09.23-27.10.23.
каникулы (9 дней)	28.10.23-05.11.23.
2 четверть: (8 недель)	06.11.23-29.12.23.
каникулы (9 дней)	30.12.23-08.01.24
3 четверть: (11 недель)	08.01.24.-22.03.24
каникулы (9 дней) *дополнительные каникулы для 1 классов (9 дней)*	23.03.24.-31.03.24 *10.02.24-18.02.24*
4 четверть: (7 недель)	01.04.2024-29.05.24
Летние каникулы	30.05.2024-31.08.2024

Занятия на каникулах могут проводиться.

Название программы	**кол-во занятий в месяц**									
	сент	окт	нояб	дек	янв	фев	март	апр	май	итого
«Считай. Думай. Рассуждай.» 8 класс	4	4	4	4	3	4	4	4	3	34

Методическое обеспечение.

Оснащение.
Доска, компьютер, проектор, экран.

В процессе реализации данной программы используются такие методы обучения:
- метод проблемного обучения, с помощью которого учащиеся получают эталон научного мышления;

- метод частично-поисковой деятельности, способствующий самостоятельному решению проблемы;
- исследовательский метод, который поможет школьникам овладеть способами решения задач нестандартного содержания.

Список литературы

1. Агаханов, Н. Х. Математика: районные олимпиады: 6-11 классы / Н.Х. Агаханов, О.К. Подлипский. – Москва: Просвещение, 2010. - 192, [1] с.
2. Акияма, Дж. Страна математических чудес / Джин Акияма, Мари-Джо Руис; ил. Франсес Алькарас; [пер. с англ. М. И. Бабиковой]. – Москва: МЦНМО, 2009. - 239, [1] с.
3. Арнольд, В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет / В. И. Арнольд. – Москва: МЦНМО, 2007. - 16 с.
4. Балаян, Э. Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. - 3-е изд. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. - 364, [1] с.
5. Башмаков, М. И. Математика в кармане "Кенгуру": международные олимпиады школьников: 7- 11 / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. – Москва: Дрофа, 2011. - 297, [1] с., [2] л. ил.
6. Галицкий, М. Л. Сборник задач по алгебре. 8-9 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. - 20-е изд. – Москва: Просвещение, 2016. - 301 с.
7. Галкин, Е. В. Задачи с целыми числами: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений: 7-11 классы / Е. В. Галкин. - Москва: Просвещение, 2012. - 269 с.
8. Гарднер, М. Математические чудеса и тайны: математические фокусы и головоломки / М. Гарднер; [сокр. пер. с англ. В. С. Бермана; под ред. Г.Е. Шилова.] - 5- изд., стер. –Москва: Наука, 1986. - 127 с.
9. Генкин, С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: АСА, 1994. - 268, [1] с.
10. Горнштейн, П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – Москва; Киев: Киев: РИА "Текст"; МП "ОКО", 1992. - 290 с.
11. Козлова, Е.Г. Сказки и подсказки: задачи для математического кружка / Е. Г. Козлова. - 2-е изд., испр. и доп. – Москва: МЦНМО, 2004. - 163, [4] с.: ил.
12. Кононов, А. Я. Математическая мозаика. Занимательные задачи по математике для учащихся 5- 11 кл / А.Я. Кононов. – Москва: Педагогическое общество России, 2004. - 156, [1] с.
13. Леман, И. Увлекательная математика / Иоханнес Леман; [пер. с нем. Ю. А. Данилова]. – Москва: Знание, 1985. - 270 с.: ил.
14. Математика: всероссийские олимпиады: вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – Москва: Просвещение, 2008. - 192 с.

15. Математика: областные олимпиады. 8-11 классы / [Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и др.]. – Москва: Просвещение, 2010. - 238, [1] с.: ил.
16. Математика для школьников: научно-практический журнал для учащихся старшего и среднего возраста. Библиотека учителя и школьников/ гл. ред. Бунимович. – Москва: Школьная Пресса. 2002-2018.
17. Спивак, А. В. Тысяча и одна задача по математике: книга для учащихся 5-7 классов / А. В. Спивак. – Москва: Просвещение, 2002. - 208 с.

Приложения

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения. Имеется десять способов решения квадратных уравнений.

***1. СПОСОБ**: Разложение левой части уравнения на множители.*

Решим уравнение
$x^2 + 11x - 26 = 0$
Разложим левую часть на множители:
$x^2 + 11x - 26 = x^2 + 13x - 2x - 26 = x(x + 13) - 2(x + 13) = (x + 13)(x - 2).$
Следовательно, уравнение можно переписать так:
$(x + 13)(x - 2) = 0$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при *x = 2*, а также при *x = -13*. Это означает, что число *2* и *– 13* являются корнями уравнения $x^2 + 11x - 26 = 0$.

***2. СПОСОБ**: Метод выделения полного квадрата (классический метод).*

Решим уравнение $x^2 + 8x - 9 = 0$
Выделим в левой части полный квадрат.
Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:
$x^2 + 8x - 9 = x^2 + 2 \bullet x \bullet 4 - 9.$

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. Поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как

$x^2 + 2 * x * 4 + 4^2 - 4^2 - 9.$
$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 4^2 - 9.$
$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 16 - 9.$
$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 25.$

Преобразуем теперь левую часть уравнения
$x^2 + 8x - 9 = 0,$
прибавляя к ней и вычитая 4^2. Имеем:
$(x^2 + 2 * x * 4 + 4^2) - 25.$
$(x + 4)^2 - 25 = 0.$
Таким образом, данное уравнение можно записать так:
$(x + 4)^2 - 25 = 0,$
$(x + 4)^2 = 25,$
$\sqrt{(x + 4)^2} = \sqrt{25},$
$x + 4 = \pm 5$

Следовательно, $x = -4 \pm 5$.

$x = -4 + 5 \quad x = 1 \quad x_1 = 1$
$x = -4 - 5 \quad x = -9 \quad x_2 = -9$

***3. СПОСОБ**: Метод выделения полного квадрата (применение формулы выделения полного квадрата (метод Надь А. В.).*

Сделаем вывод формулы в общем виде
$ax^2 + bx + c = 0$
Данная операция является обратной операцией для $a(x + p)^2$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 * \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x^2 + 2 * \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(a\frac{c}{a} - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

Обозначим
$$p = \frac{b}{2a}$$
$$ax^2 + bx + c = a(x + p)^2 + (c - ap^2)$$
$$p = \frac{b}{2a} - \text{это средне} - \text{арифметическое корней уравнения}$$

При этом получили метод выделения полного квадрата

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Подсчитываем
$$p = \frac{b}{2a},$$
$$q = (c - ap^2).$$
и записываем полный квадрат уравнения
$$ax^2 + bx + c = a(x + p)^2 + q$$
пример
$$x^2 + x - 6 = 0$$

$a = +1\ b = +1\ c = -6$

$p = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2*1} = \frac{1}{2} = 0.5$

$q = (c - ap^2) = (-6 - 1 * 0{,}5^2) = (-6 - 0{,}25) = -6{,}25$

$a(x+p)^2 + q = 1(x + 0{,}5)^2 - 6{,}25$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x^2 + x - 6 = (x + 0{,}5)^2 - 6{,}25$

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 0{,}5)^2 - 6{,}25 = 0$

$(x + 0{,}5)^2 = 6{,}25$

$\sqrt{(x + 0{,}5)^2} = \pm\sqrt{6{,}25}$

$x + 0{,}5 = \pm\sqrt{6{,}25}$

$x + 0{,}5 = \pm 2{,}5$

$x = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x = -0{,}5 + 2{,}5 \quad x = 2 \quad x_1 = 2$

$x = -0{,}5 - 2{,}5 \quad x = -3 \quad x_1 = -3$

или более короче

$x^2 + x - 6 = 0$

$a = +1\ b = +1\ c = -6$

$p = \frac{b}{2a} = \frac{1}{2*1} = \frac{1}{2} = 0.5$

$q = (c - ap^2) = (-6 - 1 * 0{,}5^2) = (-6 - 0{,}25) = -6{,}25$

$x^2 + x - 6 = a(x + p^2) + q = (x + 0{,}5)^2 - 6{,}25$

$(x + 0{,}5)^2 - 6{,}25 = 0$

$(x + 0{,}5)^2 = 6{,}25$

$\sqrt{(x + 0{,}5)^2} = \pm\sqrt{6{,}25}$

$x + 0{,}5 = \pm\sqrt{6{,}25}$

$x + 0{,}5 = \pm 2{,}5$

$x = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x = -0{,}5 + 2{,}5 \quad x = 2 \quad x_1 = 2$

$x = -0{,}5 - 2{,}5 \quad x = -3 \quad x_1 = -3$

<u>4. СПОСОБ</u>: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения
$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$
на 4a и последовательно имеем:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$

$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$

$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

Примеры.

а) Решим уравнение: $4x^2 + 7x + 3 = 0.$

$a = 4,\ b = 7,\ c = 3,\ D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1,$

$D > 0$, два разных корня;

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 * 4} = \frac{-7 \pm 1}{2 * 4}$$
$$x_1 = \frac{-7 + 1}{2 * 4} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} = -0{,}75$$
$$x_2 = \frac{-7 - 1}{2 * 4} = -\frac{8}{8} = -1$$

$$x_1 = -\frac{3}{4} = -0.75$$
$$x_2 = -1$$

Таким образом, в случае положительного дискриминанта, т.е. при $b^2 - 4ac > 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

б) Решим уравнение:

$4x^2 - 4x + 1 = 0,$

$a = 4, b = -4\ c = 1, D = b^2 - 4ac\ = (-4)^2 - 4 * 4 * 1 = 16 - 16 = 0\ D = 0$

$D = 0$, один корень (два одинаковых корня);

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$
$$x_2 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$
$$x_1 = x_2 = x = -\frac{b}{2a}$$
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 * 4} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Итак, если дискриминант равен нулю, т.е. $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень (два повторяющих корня (кратный корень кратности 2)),

в) Решим уравнение: $2x^2 + 3x + 4 = 0,$

$a = 2,\ b = 3,\ c = 4,\ D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \bullet 2 \bullet 4 = 9 - 32 = -13,\ D < 0.$

Данное уравнение корней не имеет.

Итак, если дискриминант отрицателен, т.е. $b^2 - 4ac < 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.

Формула (1) корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ позволяет найти корни ***любого*** квадратного уравнения (если они есть), в том числе приведенного и неполного. Словесно формула (1) выражается так: *корни квадратного уравнения равны дроби, числитель которой равен второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, плюс минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверенного произведения первого коэффициента на свободный член, а знаменатель есть удвоенный первый коэффициент.*

<u>5. СПОСОБ:</u> *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x^2 + px + c = 0$. (1)

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

Например,

$x^2 – 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, так как $q = 2 > 0$ и $p = - 3 < 0$;

$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = - 7$ и $x_2 = - 1$, так как $q = 7 > 0$ и $p= 8 > 0$.

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

Например,

$x^2 + 4x – 5 = 0$; $x_1 = - 5$ и $x_2 = 1$, так как $q= - 5 < 0$ и $p = 4 > 0$;

$x^2 – 8x – 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = - 1$, так как $q = - 9 < 0$ и $p = - 8 < 0$.

<u>6. СПОСОБ:</u> *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где, $a \neq 0$.

Умножая обе его части на, а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем

$x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

При этом способе коэффициент, a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

Пример.

Решим уравнение $2x^2 – 11x + 15 = 0$.

Решение. «Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение

$y^2 – 11y + 30 = 0$.

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -p \\ y_1 y_2 = q \end{cases}$$

$$y^2 – 11y + 30 = 0.$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -11 \\ y_1 y_2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} \\ x_2 = \dfrac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Ответ: 2,5; 3.

7. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

А. Пусть дано квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ *(т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то* $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 * x_2 = 1 * \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a + b/a = -1 - c/a, \\ x_1 x_2 = -1 \cdot (-c/a), \end{cases}$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

Примеры.

1) Решим уравнение $345x^2 - 137x - 208 = 0$.
Решение. Так как $a + b + c = 0$ $(345 - 137 - 208 = 0)$, то
$x_1 = 1$, $x_2 = c/a = -208/345$.
Ответ: 1; -208/345.

2) Решим уравнение $132x^2 - 247x + 115 = 0$.
Решение. Так как $a + b + c = 0$ $(132 - 247 + 115 = 0)$, то
$x_1 = 1$, $x_2 = c/a = 115/132$.
Ответ: 1; 115/132.

Б. Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \quad (2).$$

Пример.

Решим уравнение *3x2 — 14x + 16 = 0.*
Решение. Имеем: $a = 3, b = -14, c = 16, k = -7$;
$D = k^2 - ac = (-7)^2 - 3 \cdot 16 = 49 - 48 = 1, D > 0,$ два различных корня;

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3}; x_1 = 2, x_2 = 8/3$$

Ответ: 2; 8/3
<u>В.</u> Приведенное уравнение
$x^2 + px + q = 0$
совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$
или,
$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$
или
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (3).$$
принимает вид:
Формулу (3) особенно удобно использовать, когда p — четное число.

$$\sqrt{49 + 15} = 7 \pm \sqrt{64} = 7 \pm 8.$$

Пример. Решим уравнение $x^2 - 14x - 15 = 0.$
Решение. Имеем:
$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{7^2 + 15} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm \sqrt{64} = 7 \pm 8$$
$x_{1,2} = 7 \pm 8$
Ответ: $x_1 = 15; x_2 = -1.$

<u>8. СПОСОБ:</u> Другая формула дискриминанта (основанная по формуле выделения полного квадрата (метод Надь А. В.)).

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$p = \frac{b}{2a}$$
$$ax^2 + bx + c = a(x + p)^2 + (c - ap^2)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$
$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

$$p = \frac{b}{2a}$$

$$q = \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$$

$$D = \sqrt{p^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -p \pm \sqrt{D}, \text{если } D \geq 0 \text{ и } x_{1,2} = \text{нет решений, если } D < 0$$

9. СПОСОБ: Приведенное квадратное уравнение (метод Надь А. В).

Приведенное уравнение

$x^2 + px + q = 0$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \qquad (3).$$

$$p_1 = \frac{p}{2}$$

$$x_{1,2} = -p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - q} \qquad (3).$$

<u>10. СПОСОБ:</u> Графическое решение квадратного уравнения.

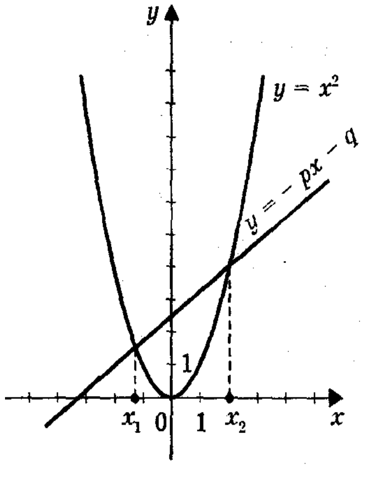

Рис. 1

Если в уравнении

$x^2 + px + q = 0$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим
$x^2 = - px - q$.
Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.
График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости -
прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:
- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

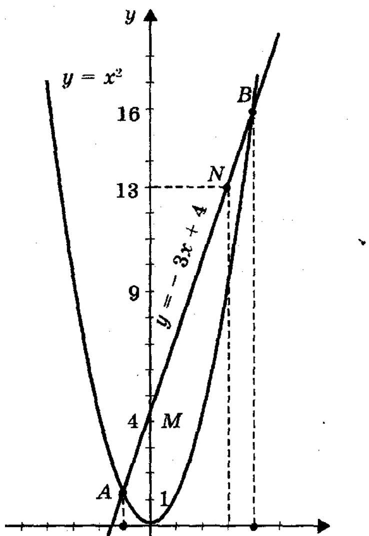

Рис. 2

- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

Примеры.

1) Решим графически уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 2).

Решение. Запишем уравнение в виде $x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3x + 4$. Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам $M\ (0;\ 4)$ и $N\ (3;\ 13)$. Прямая и парабола пересекаются в двух точках A и B с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$. <u>*Ответ*</u>: $x_1 = -1$; $x_2 = 4$.

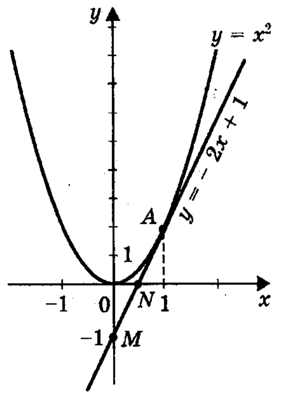

Рис. 3

2) Решим графически уравнение (рис. 3) $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^2 = 2x - 1$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x - 1$.

Прямую $y = 2x - 1$ построим по двум точкам $M\ (0;\ -1)$ и $N(1/2;\ 0)$. Прямая и парабола пересекаются в точке A с абсциссой $x = 1$. <u>*Ответ:*</u> $x = 1$.

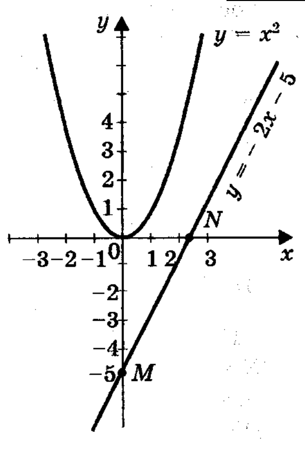

Рис. 4

3) Решим графически уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ (рис. 4).

Решение. Запишем уравнение в виде $x^2 = 5x - 5$. Построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x - 5$. Прямую $y = 2x - 5$ построим по двум точкам M(0; - 5) и N(2,5; 0). Прямая и парабола не имеют точек пересечения, т.е. данное уравнение корней не имеет.

Ответ. Уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ корней не имеет.